＜連載：PID の基本，チューニング則，PID ベースの高度制御＞

第 3 回　PID 制御

PID Control

須田　信英

大阪大学*　名誉教授

Nobuhide Suda
Professor Emeritas, Osaka University

4　2 自由度 PID 制御

4.1　対目標値変化制御特性と対外乱制御特性

1.1 節で述べたとおり，この解説では目標値の変化に制御量を追従させることと，外乱の効果を抑制することの二つの制御目的に焦点を合わせている．

3.1 節で紹介した Chien, Hrones and Reswick の調整則は，目標値追従を目的とする場合，外乱効果の抑制を目的とする場合のそれぞれに対して，PID 制御パラメータ（比例ゲイン，積分時間，微分時間）の選び方を与えている．いつもの例題について，目標値追従を目的に調整したときの対目標値変化制御特性を **Fig.9** に，外乱抑制を目的に調整したときの対外乱制御特性を **Fig.10** に示した．前者を **Fig.14** に，後者を **Fig.15** に，それぞれ実線で再掲してある．

ところで，外乱抑制を目的に調整したとき，もし目標値のステップ状変化が起こったらどうなるか，そのシミュレーション結果を **Fig.14** に破線で示してある．実線と比べてオーバーシュートが著しく大きくなっている．逆に，目標値追従を目的に調整したとき，ステップ状の外乱が加わったらどうなるかを **Fig.15** に破線で示してある．実線と比べて偏差が大きく，また偏差が零に近づくのも遅くなっている．

こういう傾向は，この例題に限らず，Chien, Hrones and Reswick の調整則に限らず，多くの場合に共通に見られる．このように，対目標値変化制御特性と対外乱制御特性とを，両方ともよくすることがむずかしい．

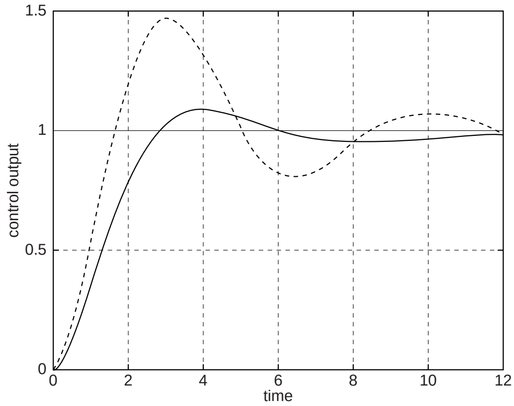

Fig.14　Step Response for Setpoint Change

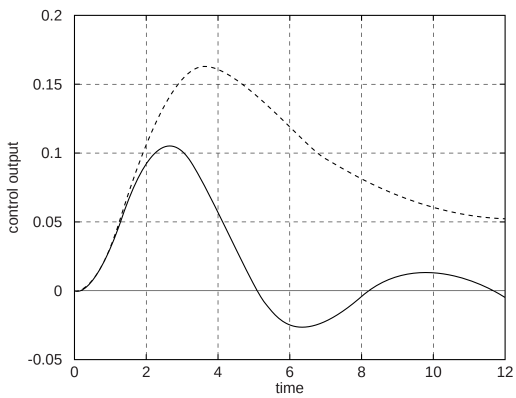

Fig.15　Step Response for Disturbance Input

* 〒 180-0013　武蔵野市西久保 1-44-15
TEL&FAX:0422-54-6624
E-mail:nsuda@gakushikai.jp

4.2 PID 制御則の見直し

1.1 節で述べたことを復習しよう．制御に際して利用できる信号は，目標値と観測量である．もし外乱の一部に直接測定できるものがあれば，それも観測量に含めるが，今ここでは外乱は直接測定できないものとする．したがって観測量は制御量の測定値である．厳密には，制御量が温度で，観測量は温度センサからの電気信号というように，区別するべきであるが，これも 1.1 節で述べたように，記述を簡単にするために用語としては両者を区別しないことも多い．制御装置において，これらの利用可能な信号から，制御システムが適切な挙動をするように，何らかの演算によって，しかるべき操作量を決定する部分を調節部といい，その演算方式を制御則というのであった．

一方，2.4 節で述べた PID 制御則は

操作量の変化 ＝

$$K_P \times \text{偏差} + K_I \times \text{偏差の積分} + K_D \times \text{偏差の微分}$$

というように，偏差の値や積分値，微分値から操作量を定めるものである．偏差とは，目標値から制御量を引いたその差のことであるから，目標値，制御量が異なってもその差は同じということがいくらでもあり得る．つまり折角利用可能な信号が二つあるのにその差だけを用いて，情報の一部を捨ててしまっているわけである．

そこで，目標値と制御量を別々に操作量の決定に反映させる方が，自由度が高く，よい制御特性が得られるであろうと考えられる．そういう制御を一般的に **2 自由度制御**というのであるが，その一般論はこの解説の範囲を超えるので，文献 1（特に 9 章以降）に譲り，あくまで比例・積分・微分にもとづく **2 自由度 PID 制御**，それも基本的な事項に限ることとする．2 自由度 PID 制御に関するもっと詳しい考察は文献 2 の 4 章に譲る．

目標値を $r\ (t)$，制御量を $y\ (t)$ で表そう．操作量 $u\ (t)$ を，偏差を $e\ (t)$ で表すのは 2.4 節と同様である．上記の制御則を式で表すと，2.4 節に示したように

$$u(t) = K_P e(t) + K_I \int_0^t e(\tau)d\tau + K_D \frac{de(t)}{dt)}$$

すなわち

$$u(t) = K_P\{r(t) - y(t)\} + K_I \int_0^t \{r(t) - y(t)\}d\tau + K_D \frac{d}{dt}\{r(t) - y(t)\}$$

である．

なお，2.4 節で述べたように

$$u(t) = K_P\left\{e(t) + \frac{1}{T_I}\int_0^t e(\tau)d\tau + T_D\frac{de(t)}{dt}\right\}$$

と表すことが多いが，ここでの説明には前者の方がわかりやすいので，そちらを用いる．もちろん

$$K_I = K_P/T_I, \quad K_D = K_P T_D$$

によって相互の換算は容易である．

さて，目標値と制御量を別々に操作量の決定に反映させるように改めるのであるが，目標値に関しては微分動作を含めるが，制御量に関しては微分動作を含まない PI 制御とするというような，特殊な場合を除けば，適当な比例係数 c_P, c_I, c_D を用いて

$$u(t) = K_P\{c_P r(t) - y(t)\} + K_I \int_0^t \{c_I r(t) - y(t)\}d\tau + K_D \frac{d}{dt}\{c_D r(t) - y(t)\}$$

と表すことができる．

無定位系と呼ばれる特殊な制御対象（文献 1 の 7.2 節参照）は別として，通常の場合は，2.2 節で述べたように，ステップ状の外乱に対する定常偏差が零になるためには

$$K_I \neq 0$$

でなければならない．ステップ状の目標値変化に対する定常偏差が零となるためには，これに加えて

$$c_I = 1$$

が必要であることが，多少の理論的考察から導かれる．以下，これらの条件を前提とする．

あらためて制御則を書き下すと

$$u(t) = K_I \int_0^t \{r(t) - y(t)\}d\tau + c_P K_P r(t) + c_D K_D \frac{dr(t)}{dt} - K_P y(t) - K_D \frac{dy(t)}{dt}$$

となる．

この式から

> 目標値が変化せず，外乱効果の抑制を目的とするときは，操作量は係数 c_P, c_D には無関係で，したがって制御特性も同じである．
>
> c_P=1, c_D=1 と限定したのがこれまで説明した PID 制御であり，仮にこれを PID 制御の原型と呼ぼう．2 自由度 PID 制御では，この限定がないことにより，原型よりも自由度が増している．そこ

で c_P, c_D を 2 自由度化パラメータと呼んでもよいであろう．

したがって，2 自由度 PID 制御では，先ず対外乱制御特性がよくなるように，PID 制御パラメータ K_P, K_I, K_D の値を選定し，それから対目標値制御特性に注目して，2 自由度化パラメータ c_P, c_D の値を調節するのが適切である．

などのことが読みとれる．

4.3 微分先行型と比例・微分先行型

前節の制御則を見ると，右辺に目標値の微分が含まれている．目標値がステップ状に，つまり不連続に変化したとき，それを微分するとデルタ関数と呼ばれる非常に鋭いパルス状の信号となる．2.4 節で述べたとおり，完全な微分は不可能であって，実際は不完全微分で代用されるのであるが，不完全微分であってもやはりパルス状の信号となる．パルス状に加熱したり，トルクを加えたり，弁を動かしたり，つまり操作部をパルス状に動かすというのは，できもしないし，望ましいことでもない．

そこで c_D=0 として目標値の（不完全）微分を含まないようにすることがしばしば行われる．c_D=0, c_P=1 とした場合を**微分先行型 PID 制御**とか，**PI-D 制御**とか呼んでいる．(文献 2 の 3.1.1 節参照)

再び制御則の右辺を見ると，目標値に比例する項が含まれている．そこで目標値がステップ状に変化すると，操作量もステップ状の成分を含むことになる．操作部をステップ状に動かすことも実用上望ましくない場合がある．

そういう場合には，c_D=0 に加えてさらに c_P=0 とすることになる．これを**比例・微分先行型 PID 制御**とか，**I-PD 制御**とか呼んでいる．(文献 2 の 3.1.2 節参照)

これからわかるように，PI–D 制御，I–PD 制御のハイフンは，その前は目標値と制御量が両方関与する動作，その後は制御量だけが関与する動作という区切りを表している．2.4 節で，過去・現在・未来という流れで見ると，PID 制御はむしろ IPD 制御と捉える方が自然であると述べた．IPD 制御とすると，ハイフンは (1) I の次に入るか，(2) IP の次に入るか，(3) どこにも入らないかのいずれかである．(1) が I–PD 制御，(2) が IP–D 制御つまり PI–D 制御，(3) が IPD 制御つまり PID 制御の原型である．そうして，それ以外のたとえば ID–P 制御などは使われていない．

また，2 自由度 PID 制御は，原型と PI–D 制御なり，I–PD 制御なりの中間に来るように，$0 \leq c_D \leq 1$, $0 \leq c_P \leq 1$ と選ぶことが多いようである．

なお，制御則の右辺には制御量の微分に比例する項，制御量に比例する項も含まれているが，ほとんどの制御対象は熱容量，タンクの容量，質量などに由来する慣性を持っているため，ステップ状の外乱が加わっても，目標値がステップ状に変化しても，制御量は連続に，滑らかに変化するので，制御量の微分項や比例項のために操作量がパルス状やステップ状の成分を含むことはない．ここで目標値の微分項や比例項だけを問題にしたのはそのためである．

4.4 対外乱制御特性と対目標値変化制御特性の関係

4.2 節で，2 自由度 PID 制御では，先ず対外乱制御特性をよくするように PID 制御パラメータ K_P, K_I, K_D の値を選定し，それから自由度化パラメータ c_P, c_D の値を調節して対目標値制御特性を改善するという方策が立てられた．

そこで，対外乱制御特性が確定したとき，対目標値変化制御特性はどうなるか，その際に 2 自由度化パラメータ c_P, c_D はどういう働きをするかを調べておこう．

制御則を制御量に関する部分と目標値に関する部分とに分けて

$$u(t) = u_y(t) + u_r(t)$$

$$u_y(t) = -K_I \int_0^t y(t) d\tau - K_P y(t) - K_D \frac{dy(t)}{dt}$$

制御則 A

$$u_r(t) = K_I \int_0^t r(t) d\tau + c_P K_P r(t) + c_D K_D \frac{dr(t)}{dt}$$

制御則 B

とし，それぞれ右に記したように呼ぶことにする．

制御量は与えられた操作量に対して，制御対象の動特性にしたがって定まるものである．

対外乱制御特性は制御則 B とは無関係で，2.1 節で説明したように外乱は操作量に加算される形で加わると想定しているから，対外乱応答は **Fig.16 (a)** の関係から定まる．実際，シミュレーションに際しては，仮想的制御対象の動特性を表す数式と制御則 A とを，この図のように組み合わせて計算できるのである．

対目標値変化制御特性は，さらに制御則 B を組み合わせて，同図 (b) の関係から定まる．ここで，制御対象の動特性が線形，時間不変という一定の条件（文献 1 の 2 章参照）を満たしていると，計算の順序を入れ替えて同図 (c) としても同じ結果が得られる．ところが (c) の左半分は (a) と同じであり，したがって目標値のステップ

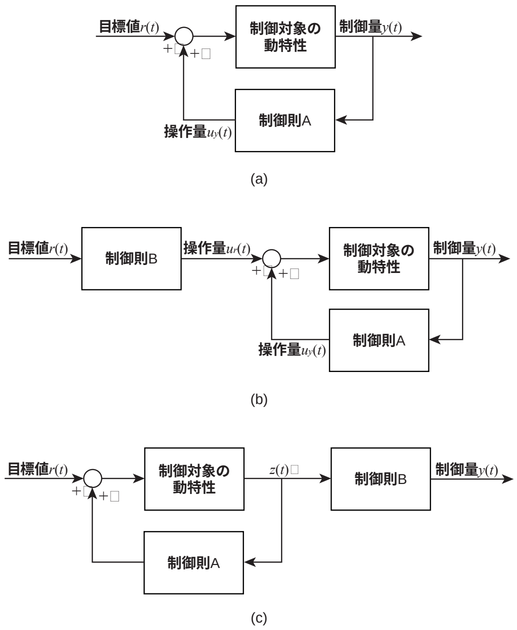

Fig.16 Schematic Diagram of Responses

状変化に対するその出力 $z\ (t)$ はステップ状外乱に対する制御量の応答と一致する．そこでステップ状の目標値変化に対する制御量の応答 $y\ (t)$ は，この $z\ (t)$ に制御則 B の演算を施して得られる．すなわち

$$y(t) = K_I \int_0^t z(t)d\tau + c_P K_P z(t) + c_D K_D \frac{dz(t)}{dt}$$

となる．

この式から以下のことが読みとれる．

(1) I–PD 制御（c_D=0, c_P=0）では，対目標値変化制御特性は対外乱制御特性 $z\ (t)$ の積分の K_I 倍である．
(2) PI–D 制御（c_D=0, c_P=1）では，上記 I–PD 制御の対目標値変化制御特性に，対外乱制御特性 $z\ (t)$ の K_P 倍をつけ加えたものである．
(3) PID 制御の原型（c_D=1, c_P=1）では，上記 PI–D 制御の対目標値変化制御特性に，対外乱制御特性 $z\ (t)$ の導関数の K_D 倍をさらにつけ加えたものである．
(4) 2 自由度 PID 制御では，I–PD 制御の対目標値変化制御特性の K_I 倍を基本として，それに対外乱制御特性の K_P 倍とその導関数の K_D 倍にそれぞれ適当な重み c_P, c_D をつけて加算したものとなる．

これからわかることは，対外乱制御特性 $z\ (t)$ の積分は常に含まれるいわば基本波形であり，対外乱制御特性 $z\ (t)$ およびその導関数がこれに付け加える付加波形であって，2 自由度化パラメータ c_P, c_D は付加波形をどの程度付け加えるかのさじ加減に相当するということである．

上記 (1)~(3) の関係を図示したのが **Fig.17** である．い

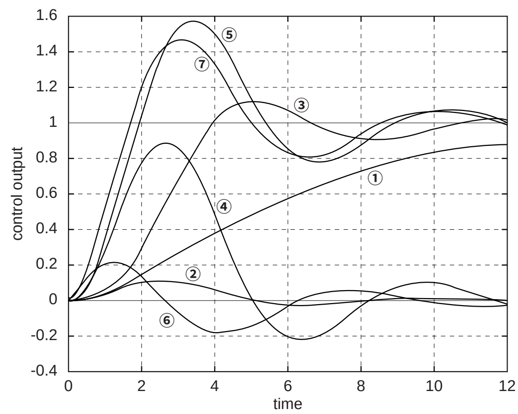

Fig.17 Relationship between Step Responses

つも使う例題で，Chien，Hrones and Reswick の調整則のうち外乱効果の抑制を目的とする場合を適用している．図中① と記したのは制御対象のステップ応答 (**Fig.8**) を参考までに再掲したものである．② と記したのが対外乱制御特性で，**Fig.15** の実線の再掲である．③ が② の積分の K_I 倍であり，(1) により I–PD 制御の対目標値変化制御特性に等しい．④ が② の K_P 倍であり，⑤ が③ +④ であって，(2) により PI–D 制御の対目標値変化制御特性に等しい．⑥ は② の導関数の K_D 倍であり，⑦ が⑤ +⑥ であって，(3) により PID 制御の原型の対目標値変化制御特性，すなわち **Fig.14** の破線に等しいのである．

4.5 2 自由度化パラメータの選定

2 自由度化の効果の一例を **Fig.18** に示す．いつもの例題で，Chien，Hrones and Reswick の調整則のうち外乱効果の抑制を目的とする場合を適用していることは **Fig.17** と同じである．c_D=0 とし，c_P を 0 から 1 まで 5 段階に変えて，対目標値変化制御特性を示してある．

c_P=0 は I–PD 制御で，**Fig.17** の③ と等しく，c_P=1 は PI–D 制御で，**Fig.17** の⑤ と等しい．中間の値については，c_P を大きくすると立ち上がりが速くなるが，その代わりオーバーシュートが大きくなっている．逆に言えば，c_P を小さくするとオーバーシュートは抑えられるが，その代わり立ち上がりが遅くなっている．そういう傾向になるであろうことは，シミュレーションをしなくても，前節の性質 (1)~(4) と **Fig.17** の基本波形，付加波形から，予想できるところである．

Fig.18 には，目標値追従を目的として調整した場合の

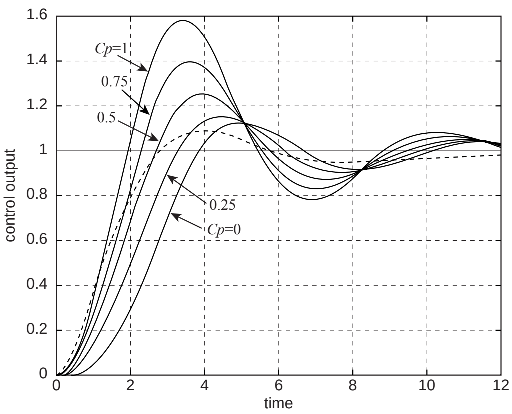

Fig.18　Step Responses for Setpoint Change

対目標値変化制御特性 (**Fig.14** の実線) を比較のために破線で示してある．立ち上がりやオーバーシュートから見て，やはり目標値追従を目的に調整した方がよい特性を示しているのは当然であろう．

2 自由度化パラメータ c_P, c_D の選定は，前節の性質 (1)〜(4) によってある程度の傾向をつかみ，必要なら **Fig.18** のようなシミュレーションを行って，試行錯誤によるのが最も単純な方法と思われる．そのほか，ある種の評価関数を最小化する方法など，いくつかが文献 6 に述べられている．文献 7 では，前回 3.6 節で触れた近似モデルマッチングによる方法が提案されており，同じ方法が文献 8 でも用いられている．

すでに述べたとおり，2 自由度 PID 制御においても，対目標値変化制御特性は基本波形を初め，それにつけ加える波形も対外乱制御特性の調整で確定してしまい，それをどういう重み c_P, c_D をかけてつけ加えるかというさじ加減にだけ自由度が残っている．

これに飽きたらないとなれば，波形の方にも手を加える工夫が必要になる．一つの工夫が文献 2 の 4.4 節に述べられており，その背景については文献 9 で考察している．

4.6　フィードフォワード制御とフィードバック制御

4.2 節で示した 2 自由度 PID 制御の制御則は，次のように書き換えることができる．

$$
\begin{aligned}
u(t) &= K_I \int_0^t \{r(t)-y(t)\}d\tau + c_P K_P r(t) \\
&\quad + c_D K_D \frac{dr(t)}{dt} - K_P y(t) - K_D \frac{dy(t)}{dt} \\
&= (c_P-1)K_P r(t) + (c_D-1)K_D \frac{dr(t)}{dt} \\
&\quad + K_P\{r(t)-y(t)\} + K_I \int_0^t \{r(t)-y(t)\}d\tau \\
&\quad + K_D \frac{d}{dt}\{r(t)-y(t)\} \\
&= \left[(c_P-1)K_P r(t) + (c_D-1)K_D \frac{dr(t)}{dt}\right] \\
&\quad + \left[K_P e(t) + K_I \int_0^t e(\tau)d\tau + K_D \frac{de(t)}{dt}\right]
\end{aligned}
$$

最右辺で第 2 の四角括弧内は PID 制御の原型の制御則であり，目標値と制御量とを比較して，その差を操作量に反映しているから，これはフィードバック制御である．一方，第 1 の四角括弧内は，目標値を直接操作量に反映するものであって，目標値のフィードフォワード制御と見なされる．

4.3 節で述べたとおり，2 自由度化パラメータは $0 \leq c_D \leq 1$, $0 \leq c_P \leq 1$ と選ぶことが多いことを考慮すると，第 1 項のフィードフォワード制御で，目標値およびその微分にかかる係数はマイナスであることになる．それは，これまで述べてきたように，外乱の抑制を目的に調整を行うと，目標値変化に対してはオーバーシュートが大きくなるので，目標値のフィードフォワードによって，そのオーバーシュートを削っているのだと考えられる．つまり，ここでは先ずフィードバック制御ありきで，その特性を改善するのにフィードフォワード制御を使っている．そのために，フィードフォワードの係数がマイナス，すなわち温度を上げたいと思ったら加熱量を減らすという，一見奇異な状況になったものである．

ところで，1.2 節ではフィードフォワード制御とフィードバック制御の特徴を説明した．すなわち，フィードフォワード制御は，このような操作量を加えれば望ましい制御量が得られるはずだという，事前の判断に基づく制御であって，その事前の判断が正確であればよい結果が得られる．判断のもとになっているのは，制御対象の動特性はこういうものであろうという予想である．そこでこの予想が実際の動特性とずれている場合とか，測定されない外乱が加わったときとか，判断の際の想定と異なる状況では期待通りの制御特性は得られない．フィードバック制御の方は，目標値と制御量がうまく一致しているかどうかという，結果をみて判断を修正するのであるから，予想されない事態に対してもかなりの程度まで対応が可能である．しかし結果がでてから修正することによる遅れが出がちなのが欠点である．

そこで，フィードフォワード制御とフィードバック制御とは，それぞれの特色を生かして，使い分けたり，併

用したりするべきものであると指摘した．

そうして，われわれが自動車を運転してカーブにさしかかったとき，道路の曲がり具合に合わせた適当なハンドル操作を考えて，それを適用するフィードフォワード制御を先ず行うが，それだけでは，路面の状況とか積み荷の量などによって摩擦や慣性が予想と異なる場合や，横風という外乱が加わった場合などには，進路のずれを生じることもあるからフィードバック制御も併用しているという例を挙げた．

この例では，先ずフィードフォワード制御を行い，その弱点を補う形でフィードバック制御が用いられている．その意味で，上に述べた先ずフィードバック制御ありきというのとは逆の立場を採っている．

それでは自動車の例のような立場で，自動制御を考えたらどうなるであろうか．結論から先にいうと，フィードバック制御はPID制御でもよいが，フィードフォワード制御の方は，比例・積分・微分という演算だけではなく，もっと複雑な演算を必要とするのである．その意味で，4.2節で規定した，あくまで比例・積分・微分という演算だけを用いる2自由度PID制御という範囲からは逸脱するが，フィードフォワード制御とフィードバック制御とのそれぞれの特色を生かした使い分けという視点からは興味深いので，あらましの説明をしておこう．

自動車の運転で，道路の曲がり具合に合わせた適当なハンドル操作を考えられるのは，ハンドル操作という操作量を加えたら，自動車の進路という制御量がどう変わるか，すなわち自動車という制御対象の動特性のモデルが，経験にもとづいて運転者の頭の中にできているからである．運転者は道路の曲がり具合を見ると，進路をこの目標値に一致させるには，どういう操作量をくわえればよいかを，この動特性モデルによって求めている．

制御対象は操作量を入力，制御量を出力とするシステムであり，その入出力特性が動特性であるから，与えられた操作量が動特性によってどのような制御量に変換されるかを求めるのが，原因から結果を求める順方向の演算である．それに対して，上述のように与えられた目標値を発生する操作量を求めることは，結果を指定してそれを生じる原因を求める逆方向の演算である．

さて，目標値に動特性の逆演算を施して操作量を定め，それを制御対象に加えれば，制御対象は動特性にもとづいて操作量を制御量に変換するから，逆演算したものを順演算することになって，3分の1したものを3倍すればもとの値に戻るのと同じで，制御量は目標値に一致するわけである．

しかしながら，与えられた目標値を逆演算して求めた操作量が，現実に発生できるものであるとは限らない．自動車の運転で，交差点での左折を考えてみよう．この場合，本来の目標値は交差点まで直進し，指定された場所で進路を直角に変更して左へ進むことである．しかし自動車は慣性を持っているから，ある点で突如進路を直角に変更することは不可能である．そこで弧を描いて角を曲がる経路を目標値として運転しているのはいうまでもない．つまり元来の目標値は実現不可能だから，実現可能な経路へと，いうなれば目標値の‘ 緩和 ’をしているのである．

これまでしばしば目標値のステップ状変化を扱ってきた．しかし，ほとんどの制御対象は慣性を持っているから，制御量のステップ状変化は，自動車の直角左折と同様に，実際には不可能である．たとえば，温度をある瞬間にステップ状に変化させるのは，物体の熱容量のことを考えれば明らかに無理である．

こうして，緩やかにカーブした道路のように，容易に追従可能な目標値変化ならばよいが，一般には逆演算に先立って目標値を緩和しておく必要がある．つまり，フィードフォワード制御を求めるには，目標値を緩和する機能と，それに動特性の逆演算を施す機能とが，調節部に内蔵されていなければならない．先に，単純なPID演算では不十分で，もっと複雑な演算を要すると述べたのは，このことである．

フィードバック制御の方は，緩和された目標値と制御量とを比較して，その差を操作量へフィードバックするのがひとつの方法である．この方式は**条件付きフィードバック制御系**と呼ばれている．（文献2の3.5.1節参照）もうひとつの方法は，調節部の中に制御対象の動特性のモデルを用意し，制御対象へ加える操作量と同一の信号をモデルへも加え，両者の出力の差をフィードバックすることである．この方式は**モデル内蔵制御系**と呼ばれている．（文献2の3.5.1節参照）フィードバック信号に違いがあるが，逆演算に用いるモデルが実際の動特性を正確に表しており，測定されない外乱がない場合には，フィードフォワード制御のみが加わって，フィードバック制御の方は働かないことは，両者に共通している．また，どちらの場合もフィードバック制御に関しては，特に制御則に限定はなく，PID制御を採用することもできる．

なお，4.2節で説明した2自由度PID制御は，式の変形を行うとある種の緩和を施した目標値と制御量を比較して，その差をフィードバックする制御と等価であることが示される．（文献2の79ページ）しかし，フィードフォワード制御を用いないこと，緩和の仕方も，自由度は c_P, c_D の2つしかなく，かなり限定されたものである

ことが，上述の 2 種の制御系との違いである．

［参考文献］

6）荒木光彦：2 自由度 PID 制御装置　システム/制御/情報，**42**-1, 18/25, 1998

7）根本英法，須田信英：近似モデルマッチングによる 2 自由度 PID 制御の調整　第 36 回自動制御連合講演会前刷　65/68, 1993

8）北森俊行・桑田龍一：PID 制御方式の原理・実用化と設計法　計測と制御，**37**-3, 201/208, 1998

9）須田信英：PID 制御の高度化　システム/制御/情報，**38**-10, 539/544, 1994